مخاطب گرامی! به احترام
تهیه‌کنندگان این فایل، از بازنشر
غیرمجاز آن بپرهیزید.

محاسبات عددی

رایگان

کد محصول: ۱۰۲۴

ویرایش: بهار ۱۳۹۹

www.Amad-Group.ir

۵۰ پرسش پایان ترم دانشگاههای سراسری استان تهران

۱ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

جواب دستگاه روبرو را دو گام حل کنید.

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 0 \\ 3xy^2 - 2x^3 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

۲ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

جواب دستگاه را با روش گاوس سایدل تا ۳ تکرار بیابید.

$$\begin{cases} -4x + 12y - 6z = 0 \\ -7x - 4y = 12 \\ -6y + 14z = 0 \end{cases}, \quad X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

www.Amad-Group.ir

۳ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به تابع $y(x)$، محور x ها از خط $x = 1$ تا $x = 2$ حول محور xها طبق رابطه $V = \pi\int_1^2 (y(x))^2 dx$ را به کمک قاعده سیمپسون با انتخاب $h = \frac{1}{4}$ با محاسبات ۴ رقم اعشار بیابید. در صورتی که $y(x)$ در مسأله مقدار اولیه زیر صدق کند. (در صورت نیاز به حل معادله دیفرانسیل از روش رونگه - کوتا مرتبه دوم استفاده کنید)

$$\begin{cases} y' = \cos x + \cos y \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

۴ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

یک نیروگاه اتمی دچار سانحه شده و مواد اتمی در اطراف نیروگاه نشت کرده است. اگر در سه نقطه A، B و C که به ترتیب در فواصل r_A، r_B و r_C از محل نیروگاه هستند مقدار پرتوهای رادیواکتیو اندازه‌گیری شده برابر λ_A، λ_B و λ_C برحسب واحد رِم باشد، مقدار پرتو رادیواکتیو را در نقطه D که در فاصله r_D از نیروگاه است تخمین بزنید. اگر بدانیم شدت پرتو با معکوس فاصله از نیروگاه به توان دو متناسب است.

۵ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

بازه $[0,\pi]$ را به n زیربازه مساوی با طول گام h تقسیم‌بندی می‌کنیم و روی هر کدام از این زیربازه‌ها تابع $f(x)=2\sin(3x)+3\sin(2x)+x^2$ را با یک چندجمله‌ای خطی درونیابی می‌کنیم. مقدار h را طوری بیابید که خطای کل حاصل از درونیابی تکه‌ای خطی کوچک‌تر یا مساوی $\frac{4}{9}$ شود. سپس به ازای این مقدار تابع را توسط چندجمله‌های تکه‌ای خطی درونیابی کنید.

www.Amad-Group.ir

۶ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

تابع $g(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{2}{x})$ مفروض است. دنباله $\{x_n\}$ را با رابطه بازگشتی $x_{n+1}=g(x_n)$ و با انتخاب x_0 مناسب، تولید می‌کنیم. در صورتی که بدانیم این دنباله همگراست. حد (ریشه مثبت) این دنباله را یافته و سپس مرتبه همگرایی دنباله $\{x_n\}$ را بیابید.

۷ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

نشان دهید معادله $e^x(x-1)=e^{-x}(x+1)$ روی بازه $[1,2]$ یک ریشه یکتا دارد و آن ریشه را با استفاده از روش وتری و با دقت سه رقم اعشار بیابید.

۸ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

ابتدا نشان دهید معادله $x^3+3^x-2=0$ تنها دارای یک ریشه است و سپس تقریبی از این ریشه را به‌دست آورید. سپس به کمک روش نیوتون - رافسون تقریبی از ریشه را با دقت سه رقم اعشار بیابید.

۹ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

چرا محاسبه مقدار عبارت $\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}$ برای مقادیر خیلی بزرگ و مثبت x در یک وسیله محاسباتی نادقیق است؟ یک الگوریتم مناسب به‌دست آورید که عبارت فوق به‌طور دقیق محاسبه شود.

۱۰ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم اول ۹۷-۹۶

الف) اگر روش حذفی گاوس را روی دستگاه $AX=b$ که $\det(A)=0$ است به کار ببریم، چه اتفاقی در فرآیند حل مسأله رخ می‌دهد؟

ب) مسأله مقدار اولیه زیر را به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل کنید. همچنین شرایط اولیه را نیز تبدیل نمایید.

$$\begin{cases} y^{(3)}+2y'y=4 \\ y(0)=7\,,\ y'(0)=2\,,\ y''(0)=6 \end{cases}$$

۱۱ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم اول ۹۷-۹۶

مسأله مقدار اولیه زیر را به کمک روش رونگه - کوتا مرتبه دوم (RK2) به ازای $h=0/5$ حل کنید و تقریبی برای $y(1/5)$ به‌دست آورید.

$$\begin{cases} x^2y''+xy'-y=0 \\ y(1)=-1\,,\ y'(1)=1 \end{cases}$$

۱۲ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم اول ۹۷-۹۶

مقادیر تابع $f(x)$ در جدول زیر داده شده است.

x_i	۰	۰/۵	۱
$f(x_i)$	۱	۲	۳

با توجه به داده‌های جدول و با استفاده از هر فرمول دلخواه در انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری عددی، عبارت مقابل را تقریب بزنید.

$$\int_0^1 f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

۱۳ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم اول ۹۷-۹۶

الف) یک فرمول انتگرال‌گیری عددی به فرم زیر ارائه کنید.

$$\int_0^{0/5} f(x)dx \approx w_0 f(0) + w_1 f(0/3) + w_2 f(0/4)$$

ب) فرض کنید $h=\frac{b-a}{4}$ و $x_0=a$، $x_1=a+h$، $x_2=a+2h$، $x_3=a+3h$ و $x_4=b$ پنج نقطه یکنواخت در $[a\,,b]$ باشند. فرمول انتگرال‌گیری زیر را به یک فرمول مرکب $n+1$ نقطه‌ای در $[a\,,b]$ تعمیم دهید. چه شرطی روی n باید برقرار باشد؟

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2h}{45}(7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4))$$

www.Amad-Group.ir

۱۴ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم اول ۹۷-۹۶

الف) به کمک روش حذفی گاوس و با محورگیری جزیی دستگاه خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x_1+x_2+4x_3+x_4=3 \\ 3x_1+x_2+x_3=3 \\ 4x_2+2x_3+x_4=-3 \\ 2x_3+3x_4=-1 \end{cases}$$

ب) یک تکرار روش ژاکوبی و یک تکرار روش گاوس - سایدل را برای حل دستگاه فوق با حدس اولیه $X^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ بنویسید.

ج) آیا این امکان وجود دارد که تغییری در دستگاه قسمت الف) اعمال شود تا همگرایی روش‌های ژاکوبی و گاوس - سایدل برای حل آن به ازای هر حدس اولیه تضمین شود؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، تغییرات لازم را انجام دهید و در غیر اینصورت جواب خود را با دلیل بیان کنید.

گروه آموزشی
www.Amad-Group.ir

www.Amad-Group.ir

۱۵ علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۹۷-۹۶

ارتفاع موج دریا (H) به دلیل اندرکنش با بستر دچار زوال شده و ارتفاع موج به تدریج کاهش می‌یابد. در دینامیک سیالات نشان داده می‌شود اگر لایه‌ی مرزی رفتاری لمینار داشته باشد، ارتفاع موج در هر مکان در راستای انتشار موج (X) توسط رابطه‌ی روبرو قابل توصیف است: $\frac{dH}{dx}=-\frac{f}{۳}(\frac{H}{d})^{۲}$

در این رابطه، d عمق آب در محل بوده که برای سادگی همه جا ۱۰۰ متر در نظر بگیرید. همچنین ضریب افت انرژی f از رابطه‌ی مقابل تعیین می‌شود: $f=۰/۰۳۵(Re)^{-۰/۱۶}$

که در آن Re عدد رینولدز بوده و برحسب ارتفاع موج (H)، پریود موج (T) و ویسکوزیته‌ی آب (ν) به‌صورت روبرو تخمین زده می‌شود: $Re=\pi\frac{H^{۲}}{۲\nu T}$

که در آن $\pi=۳/۱۴۱۵...$ است.

الف) رابطه‌ی دیفرانسیلی ارائه شده را به روش تفاضل محدود گسسته‌سازی کنید.

ب) اگر فرض کنیم در نقطه‌ی $X=۰$ مقدار ارتفاع موج یک متر $(H=۱m)$ و پریود موج ۶ ثانیه است $(T=۶sec)$ و پریود موج در طول انتشار موج تغییری نمی‌کند، کدی بنویسید که با گام‌های مکانی ۱۰۰ متری، ارتفاع موج را در $x=۱۰۰۰۰۰$ متری محاسبه نماید. ویسکوزیته‌ی آب را $\nu=۱۰^{-۶}$ (با واحد مجذور متر بر ثانیه) درنظر بگیرید.

۱۶ علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۹۷-۹۶

الف) فرض کنید A، ماتریس ضرایب یک دستگاه معادلات خطی، مسلط قطری (غالب قطری) باشد، نشان دهید $\det(A)\neq ۰$.

ب) دستگاه معادلات خطی زیر را با روش تکراری گاوس - سایدل تا ۲ تکرار حل کنید.

$$\begin{cases}-۴x_{۱}+۱۲x_{۲}-۶x_{۳}=۰\\-۷x_{۱}-۴x_{۲}=۱۲\\-۶x_{۲}+۱۴x_{۳}=۰\end{cases}$$

۱۷ علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۹۷-۹۶

تقریبی از طول قوس منحنی $y=y(x)$ را از $x=۰$ تا $x=۱$ به کمک روش ذوزنقه با انتخاب گام $h=۰/۵$ بیابید درصورتی‌که y در مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر صدق کند (در صورت نیاز به حل معادله، از روش رونگه - کوتای مرتبه دوم استفاده کنید). $y'-y^{۲}+x+۱=۰\ ,\ y(۰)=۱$

۱۸ علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۹۷-۹۶

مقدار تقریبی انتگرال $\int_{-۱}^{۲}f(x)dx$ را با فرض

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۲}{x+۲} & x<۰\\ \cos x & x\geq ۰\end{cases}$$

به روش سیمپسون با انتخاب طول گام $h=\frac{۱}{۲}$ محاسبه کنید.

۱۹ علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۹۷-۹۶

تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در $[۱,۲]$ مفروض است. این فاصله را به چند زیرفاصله به فرم $[x_i \; x_{i+۱}]$ به طول h تقسیم کنیم تا خطای حاصل از درونیابی تابع به وسیله‌ی چندجمله‌ای درجه‌ی دومی که f را در نقاط $x_{i-۱}$، x_i و $x_{i+۱}$ درونیابی می‌کند کوچک‌تر از $\frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۷}$ باشد؟

۲۰ علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۹۷-۹۶

چندجمله‌ای لاگرانژی بنویسید که از نقاط $(x_۰, f(x_۰))$، $(x_۱, f(x_۱))$ و $(x_۲, f(x_۲))$ بگذرد. سپس عبارت $\frac{۳x^۲+x+۱}{(x-۱)(x-۲)(x-۳)}$ را به‌صورت جمع جبری چند کسر جزئی بنویسید.

۲۱ علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۹۷-۹۶

تقریبی از ریشه‌ی معادله‌ی $۳xe^x-۱=۰$ را از روش تکرار نقطه ثابت (تکرار ساده) تا ۳ تکرار بیابید.

۲۲ علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۹۷-۹۶

فرض کنید برای محاسبه‌ی $I=\int_{\sqrt{\frac{۱}{۳}}}^{\sqrt{\frac{۲}{۳}}}\sin(x^۲)dx$ از بسط تیلور $\sin(x^۲)$ استفاده کنیم. انواع خطاهایی که در این محاسبه بروز می‌کند برشمارید.

۲۳ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۶-۱۳۹۵

به روش رامبرگ حاصل $I=\int_۰^t e^{-\sin^۲ x}dx$ را تا مرتبه دقت $O(h^۸)$ بیابید.

۲۴ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۶-۱۳۹۵

تقریبی از طول قوس منحنی $y(x)$ در بازه $[۰,۰/۴]$ با استفاده از فرمول $L=\int_۰^{۰/۴}\sqrt{۱+(y')^۲}\,dx$ را به روش سیمپسون با انتخاب $h=۰/۲$ بیابید، در صورتیکه y در مسأله مقدار اولیه زیر صدق کند. (در صورت نیاز از روش رانگه - کوتا مرتبه دوم برای حل مسأله مقدار اولیه زیر استفاده شود)

$$\begin{cases} y'=\cos x+\cos y \\ y(۰)=۰ \end{cases}$$

www.Amad-Group.ir

۲۵ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۶-۱۳۹۵

جواب تقریبی دستگاه‌های زیر را تا ۳ تکرار به‌دست آورید.

الف) $x^{(۰)}=\begin{bmatrix}۰\\۰\\۰\end{bmatrix}$, $\begin{cases} -۹x+۲y+۴z=-۱۶ \\ ۹x+۱۵y-۵z=-۲ \\ ۱۸x+۱۲y+۵z=۲۹ \end{cases}$ با روش ژاکوبی

ب) $\begin{cases} x_۰=۱ \\ y_۰=۱ \end{cases}$, $\begin{cases} ۲x^۳-y^۲=۱ \\ xy^۳-y=۴ \end{cases}$

۲۶ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۶-۱۳۹۵

چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را یافته و تقریبی از $f(1,1)$ را بیابید.

x_i	۱/۰	۱/۳	۱/۶	۱/۹	۲/۲
f_i	۰/۷۶۵۲	۰/۶۲۰۱	۰/۴۵۵۴	۰/۲۱۱۸	۰/۱۱۰۴

۲۷ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۶-۱۳۹۵

جدول داده‌های زیر را درنظر بگیرید:

x_i	۰	۱	۲	۳
y_i	۰	۱/۱	۱/۹	a

مقدار a را طوری تعیین کنید که نقطه $(3,a)$ روی خط کمترین مربعات قرار بگیرد.

۲۸ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۶-۱۳۹۵

الف) نشان دهید معادله $\cos x - 3x + 1 = 0$ در بازۀ $[0,\frac{\pi}{2}]$ دارای ریشه است. با تعیین $g(x)$ مناسب در روش تکرار نقطه ثابت، ضمن بررسی شرایط همگرایی با استفاده از نقطـه شـروع $x_0 = 0$ تقریـب درسـتی برای ریشه با دقت ۵ رقم اعشار به‌دست آورید.

ب) تابع $g(x) = \frac{1}{5}(4x + \frac{3}{x^4})$ مفروض است. دنباله $\{x_n\}$ را با رابطه بازگشـتی $x_{n+1} = g(x_n)$ و بـا انتخاب x_0 مناسب، تولید می‌کنیم. در صورتی که بدانیم این دنباله همگراست، حد ایـن دنبالـه را یافتـه و سپس مرتبه همگرایی دنباله $\{x_n\}$ را بیابید.

۲۹ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۶-۱۳۹۵

دنباله بازگشتی $\begin{cases} P_n = \frac{10}{3}P_{n-1} - P_{n-2} \\ P_0 = 1,\ P_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$، دنباله مولد $P_n = (\frac{10}{3})^n$ می‌باشد. با محاسبات ۵ رقم اعشار، از طریق دنباله مولد (رابطه بازگشتی) و نیز دنباله اصلی، P_{10} را محاسبه کنیـد. چـه نتیجـه‌ای می‌گیریـد؟ توجیه شما از نتیجه حاصل چیست؟

www.Amad-Group.ir

۳۰ خوارزمی / پایان ترم دوم ۹۶-۹۵

یک تحریف از stiff و nonstiff بودن یک معادله ارائه دهید و یـک مثـال بزنیـد. آیـا بـا تغییـر ناگهـانی سرعت، معادله به سمت stiff شدن پیش می‌رود؟

۳۱ خوارزمی / پایان ترم دوم ۹۶-۹۵

با توجه به جداول ترمودینامیکی داده شده برای آن متراکم در فشار ۲۰۰bar

الف) با وصل کردن نقاط متوالی توسط خط، حجم مخصوص آب را در دماهـای ۲۵، ۶۲، ۹۳، ۱۲۶، ۱۵۵ و ۲۰۰ بیابید.

ب) با وصل کردن نقاط متوالی توسط تابع درجه سه، حجم مخصوص آب را در دماهای ۲۵، ۶۲، ۹۳، ۱۲۶، ۱۵۵ و ۲۰۰ بیابید.

ج) تحلیل مهندسی خود را از نتایج حاصله ارائه دهید.

۳۲ خوارزمی / پایان ترم دوم ۹۶-۹۵

با مثال شرح دهید IVP & BVP چه تفاوتی با هم دارند؟

۳۳ خوارزمی / پایان ترم دوم ۹۶-۹۵

معادله دیفرانسیل برای نوسانگر واندرپول داده شده است. $y'' - \mu(1-y^2)y' + \alpha y = u$

با توجه به آن یک M_file اسکریپت را طوری بنویسید که بتوان با تغییر پارامترهای μ، α و u پاسخ سیستم را به‌دست آورد.

مطلوبست پاسخ سیستم (رسم نمودارهای مکان - زمان، سرعت - زمان و مکان - سرعت) در حالت‌های:

الف) $\alpha = 1$، $\mu = 2$ و $u = \sin t$ (مکان اولیه = ۲، سرعت اولیه = ۵)

ب) $\alpha = 1$، $\mu = 2$ و ورودی پله واحد (مکان اولیه = ۲، سرعت اولیه = ۵)

۳۴ خوارزمی / پایان ترم دوم ۹۶-۹۵

انتگرال داده شده را محاسبه کنید.

$$\int_3^2 \int_5^6 \frac{e^{xy}}{x^2 y} dydx$$

۳۵ خوارزمی / پایان ترم دوم ۹۶-۹۵

انتگرال داده شده را به چهار روش الف) مستطیلی، ب) ذوزنقه، ج) سیمپسون مرکب، د) گاوس محاسبه نمایید.

$$\int_0^5 e^{-x^2} dx$$

با توجه به اینکه قبلا در درس آمار این انتگرال را در بازه $(0, \infty)$ به روش دیگری (تابع گاما) محاسبه کرده‌اید نتایج را با هم مقایسه و تحلیل مهندسی کنید.

www.Amad-Group.ir

۳۶ خوارزمی / پایان ترم دوم ۹۶-۹۵

با توجه به جدول ترمودینامیکی داده شده، نمودار دما-حجم مخصوص بخار آب در فشار ۷bar را با منحنی‌های درجه ۱ تا ۹ تقریب بزنید و تحلیل مهندسی خود را از نمودارهای به‌دست آمده ارائه دهید.

۳۷ خوارزمی / پایان ترم دوم ۹۶-۹۵

الف) دستگاه دو معادله دومجهول داده شده را حل کنید و جواب و مقدار تابع به ازای جواب را به‌دست آورید.

$$\begin{cases} 2\log y = x \\ xy - y = 1 \end{cases}$$

ب) با رسم نمودار دو معادله و پیدا کردن نقاط تقاطع دو نمودار جواب را به‌دست آورید.

ج) به نظر شما چرا دستورات مربوط به حل معادلات غیرخطی در تولباکس بهینه‌سازی قرار دارند؟

د) به نظر شما چرا بعضی از دستورات، ورودی‌های دلخواه نمی‌پذیرند ولی یک ورودی برداری می‌پذیرند؟

www.Amad-Group.ir

۳۸ دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم اول ۹۶-۱۳۹۵

ماتریس $A=\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. ماتریس دوران متعامد نرمال گیونز $Q_{2\times2}$ را طوری تعیین کنید، که $Q^T A$ متقارن باشد.

۳۹ دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم اول ۹۶-۱۳۹۵

مسئله روبرو را حل کنید.

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left\| \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} \right\|_۲$$

۴۰ دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم اول ۹۶-۱۳۹۵

معادله دیفرانسیل $y'(x,y(x))=f(x,y),\ y(x_۰)=y_۰$ را در نظر بگیرید.

الف) فرمول پیشگو تصحیح کننده (آدامز-بشفورث، $y_{n+1}^{(p)}$، و آدامز-مولتون، $y_{n+1}^{(c)}$) مرتبه ۱ را به‌دست آورید.

ب) یک تخمین برای $|y_{n+1}^{(p)}-y_{n+1}^{(c)}|$ به‌دست آورید.

ج) یک تخمین برای خطای تصحیح کننده، یعنی $\left|y_{n+1}^{c}-y(x_{n+1})\right|$، به‌دست آورید.

۴۱ دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم اول ۹۶-۱۳۹۵

الف) در فرمول انتگرال‌گیری $\int_۰^{۲\pi} f(x)dx \simeq A_۱f(۰)+A_۲f(\pi)$، $A_۱$ و $A_۲$ را طوری بیابید که روش برای توابعی به صورت $f(x)=a+b\cos x$ به ازای همه مقادیر حقیقی a و b دقیق باشد.

ب) ثابت کنید فرمول انتگرال‌گیری تقریبی $\int_۰^{۲\pi} f(x)dx \simeq ۲(f(۰)+f(\pi))$، برای توابعی به صورت $f(x)=\sum_{k=۱}^{n}(a_k\cos(۲k+۱)x+b_k\sin kx)$ برای هر $a_k,b_k\in\mathbb{R}$ دقیق است.

www.Amad-Group.ir

۴۲ دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم اول ۹۶-۱۳۹۵

الف) ثابت کنید:

$$f'(x_i)-\frac{f(x_i+\frac{h}{۲})-f(x_i-\frac{h}{۲})}{h}=O(h^۲)$$

ب) ثابت کنید:

$$f'(x_i+\frac{h}{۲})-\frac{f_{i+1}-f_i}{h}=O(h^۲)$$

که در آن، $f_i=f(x_i),\ f_{i+1}=f(x_{i+1})$ و $h=x_{i+1}-x_i$.

۴۳ دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم اول ۹۶-۱۳۹۵

فرض کنید انتگرال $\int_a^{a+h} f(x)dx$ با $hf(a+f)-\frac{h^۲}{۲}f'(a)$ تقریب زده شود. این فرمول برای چند جمله‌ای با حداکثر چه درجه‌ای دقیق است؟

۴۴ دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم اول ۹۶-۱۳۹۵

همه معادلات مربوط به پیدا کردن ضرایب اسپلاین طبیعی $S(x)$ $(S''(۰) = S''(۲) = ۰)$ متناظر به نقاط $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$ همراه با توضیحات مربوط به ارایه آنها را بنویسید. نیازی به حل دستگاه نیست.

۴۵ دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم اول ۹۶-۱۳۹۵

ماتریس روبرو را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} -۲ & ۸ & ۴ \\ ۱۵ & ۰ & ۲ \\ ۱۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

الف) تجزیه LU را برای ماتریس A به‌دست آورید.

ب) به کمک تجزیه LU، دستگاه $Ax = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۴/۵ \end{bmatrix}$ را حل کنید.

۴۶ دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم اول ۹۶-۱۳۹۵

رابطه تکراری روبرو را در نظر بگیرید:

$$x_{n+۱} = \frac{x_n^۳ + ۳ax_n}{۳x_n^۲ + a} \quad , \quad a > ۰$$

الف) تعیین کنید این دنباله تکراری در صورت همگرایی به چه مقادیری همگراست؟

ب) مقدار دقیق مرتبه همگرایی این دنباله را به هر یک از مقادیر تعیین کنید.

۴۷ دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم اول ۹۶-۱۳۹۵

تابع $f(x) = x^n$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $p(x)$ چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط $(x_i, x_i^n), i = ۱,...,n$ باشد. با استفاده از رابطه خطای برشی تابع درون‌یاب ثابت کنید که $f[x_۱,...,x_n] = x_۱ + ... + x_n$.

۴۸ دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان‌ترم اول ۹۶-۱۳۹۵

در معادله دیفرانسیل $\begin{cases} y = x\cos^۲ \pi y \\ y(۰) = ۰ \end{cases}$ به ازای $h = ۰/۱$. مقدار $y(۰/۵)$ را به روش اویلر و اویلر پیراسته بیابید(پاسخ عددی را با پاسخ تحلیلی مقایسه کنید).

www.Amad-Group.ir

۴۹ دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان‌ترم اول ۹۶-۱۳۹۵

انتگرال $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin(۲\cos x).\sin^۲ x dx$ را به روش سیمپسون با $n = ۴$ بیابید.

۵۰ دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان‌ترم اول ۹۶-۱۳۹۵

انتگرال $I = \int_{-۱}^{۰} \frac{e^x}{\sqrt{-x}} dx$ را به روش ذوزنقه با $h = ۰/۲۵$ حل کنید.

www.Amad-Group.ir